

Arany János Tehetséggondozó Program Matematikaversenye 2022.

9. évfolyam Javítási útmutató

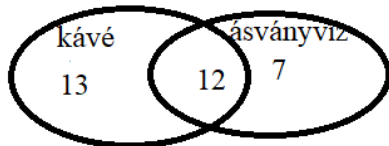
1. feladat

Egy szilveszteri rendezvényen 43 vendég szórakozott. A vendégek gyümölcslevet, ásványvizet és kávéat is és ásványvizet is. A többiek csak gyümölcslevet ittak. Hány vendég ivott csak gyümölcslevet, ha minden vendég fogyasztott valamit?

Megoldás

Készítsünk Venn-diagramot a kávé és ásványvíz fogyasztásról:

1 pont



2 pont*

A *-gal jelölt két pontot az alábbi indoklásért is megkaphatja:

Csak kávéat $25-12=13$ vendég ivott;

csak ásványvizet $19-12=7$ vendég ivott.

Kávéat vagy ásványvizet összesen $13+12+7=32$ vendég fogyasztott.

1 pont

Mindenki ivott valamit, így gyümölcslevet $43-32=11$ vendég ivott.

1 pont

Megjegyzés: az első 3 pontot az alábbi indoklásért is megkaphatja:

A logikai szitaformula alapján kávéat vagy ásványvizet $25+19-12=32$ vendég fogyasztott.

5 pont

2. feladat

Oldd meg a racionális számok halmazán és ellenőrizd a kapott megoldást!

$$7x - 3 \cdot (4 - x) = \frac{2}{3}x + 2$$

Megoldás

Felbontva a zárójeleket: $7x - 12 + 3x = \frac{2}{3}x + 2$

1 pont

összevonás: $10x - 12 = \frac{2}{3}x + 2$

1 pont

rendezés: $\frac{28}{3}x = 14$

1 pont

$x = \frac{42}{28} = \frac{3}{2}$

1 pont

Ellenőrzés

2 pont

(1 pont az eredeti egyenletbe helyettesítésért, 1 pont a helyes számolásért.)

6 pont

Arany János Tehetséggondozó Program Matematikaversenye 2022.

9. évfolyam

Javítási útmutató

3. feladat

Egy asztalra kék és piros kártyákat tettünk, majd mindegyikre a 4-es vagy az 5-ös számot írtuk. A kártyák $\frac{2}{3}$ része kék. A 4-es számkártyák 25%-a piros, és a kék kártyák $\frac{5}{8}$ részére 5-ös szám került. A kék színű 5-ös kártyák száma 100-zal több, mint a piros színű 4-es kártyák száma. Összesen hány számkártya van az asztalon? Írd le a számlás menetét is!

Megoldás

Legyen a kék 5-ös kártyák száma $5x$ 1 pont
akkor a kék 4-es kártyák száma $3x$ és 1 pont
a piros 4-es kártyák száma $5x-100$. 1 pont

A 4-es kártyák 25%-a piros, így $(5x-100)3=3x$ 1 pont
ebből $x=25$. 1 pont

A kék kártyák száma $8x=200$, a pirosak száma ennek fele, 100. 1 pont

Összesen 300 kártya van az asztalon. 1 pont

7 pont

Megjegyzés: más kettős (szín és szám) tulajdonságtól is kiindulhat, például:

Legyen a piros 4-es kártyák száma x 1 pont
akkor a kék 4-es kártyák száma $3x$ és 1 pont
a kék 5-ös kártyák száma $5x$. 1 pont

A kék 5-ös kártyák száma 100-zal több, mint a piros 4-es kártyáké, így $5x-100=x$ 1 pont
ebből $x=25$. 1 pont

A kék kártyák száma $8x=200$, a pirosak száma ennek fele, 100. 1 pont

Összesen 300 kártya van az asztalon. 1 pont

Arany János Tehetséggondozó Program Matematikaversenye 2022.

9. évfolyam Javítási útmutató

4. feladat

Egy 3x3-as táblázatba beírjuk a számjegyeket 1-től 9-ig. A táblázatból soronként balról jobbra, valamint oszloponként fentről lefelé három-három háromjegyű számot olvashatunk ki. Hogyan helyezük el a számokat a táblázatban, hogy a kapott hat szám összege a lehető legkisebb legyen?

Megoldás

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Minden számjegy két számban szerepel, vizsgáljuk meg, melyik helyiértéken:

1 pont

számjegy	függőlegesen kiolvasott szám helyiértéke	vízszintesen kiolvasott szám helyiértéke	összeg
a	100	100	200a
b	100	10	110b
d	10	100	110d
c	100	1	101c
g	1	100	101g
e	10	10	20e
f	10	1	11f
h	1	10	11h
i	1	1	2i

4 pont

Megjegyzés: ha 8-9 beírt számjegyre végzi el a helyiérték vizsgálatot, akkor 4 pontot kap, ha 6-7 számjegyre, akkor 3 pontot, ha 4-5 számjegyre, akkor 2 pontot, ha 1-3 számjegyre, akkor 1 pontot kap. A legkisebb összeget akkor kapjuk, ha

$$a = 1, b \text{ és } d \text{ 2 és 3, } c \text{ és } g \text{ 4 és 5, } e = 6, f \text{ és } h \text{ 7 és 8, } i = 9$$

1 pont

A számok összege:

$$200 + 110 \cdot (2 + 3) + 101 \cdot (4 + 5) + 20 \cdot 6 + 11 \cdot (7 + 8) + 2 \cdot 9 = 1962$$

1 pont

7 pont

5. feladat

Az A halmaz az első kétszáz pozitív páros természetes számból képzett halmaz. Hány egymást követő számnégyes választható ki a halmazból úgy, hogy a négy szám összege négyzetszám legyen? (Egymást követő számnégyes például a (2; 4; 6; 8))

Megoldás

$$A = \{2; 4; \dots; 400\}$$

Legyen $x - 3, x - 1, x + 1, x + 3$ a négy kiválasztott szám,

1 pont

ezek összege $4x$,

1 pont

ahol x páratlan szám és $x + 3 \leq 400$ miatt $x \leq 397$ és $x - 3 \geq 0$ miatt $x \geq 3$.

1+1 pont

$4x$ négyzetszám, ha x is négyzetszám,

1 pont

vagyis x lehetséges értékei $3^2, 5^2, \dots, 19^2$, így 9 számnégyes adható meg.

1+1 pont

(ezek megfelelnek az x -re adott feltételeknek)

7 pont

Megjegyzés: a számokat megadhatja $2k, 2k + 2, 2k + 4, 2k + 6$ alakban is, ahol $1 \leq k \leq 197$ ekkor az összeg $8k + 12 = 4(2k + 3)$, akkor négyzetszám, ha $2k + 3$ is az.

Arany János Tehetséggondozó Program Matematikaversenye 2022.

9. évfolyam

Javítási útmutató

6. feladat

Az ABC háromszög B csúcsánál lévő belső szöge 40° . Az f egyenes az AB oldal oldalfelező merőlegese, ami a BC oldalt a Q pontban metszi, valamint $BQ = AC = 8$ cm. Indokold a válaszokat!

- Készíts vázlatrajzot!
- Mekkora az AQ szakasz hossza?
- Mekkora az BAQ szög nagysága?
- Mekkora az AQC szög nagysága?
- Mekkora az CAQ szög nagysága?

Megoldás

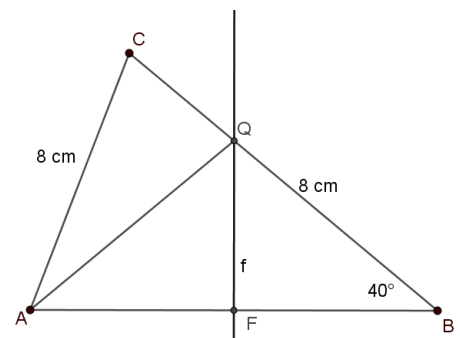
Vázlat 1 pont

$AQ=BQ=8$ cm, mert f szakaszfelező merőleges 1+1 pont

így BAQ háromszög egyenlőszárú háromszög, tehát $\sphericalangle BAQ=40^\circ$ 1+1 pont

$\sphericalangle AQB=180^\circ - 2 \cdot 40^\circ=100^\circ$, $\sphericalangle AQC$ ennek mellékszöge,
 $\sphericalangle AQC=80^\circ$ 1+1 pont

$AC=AQ$ miatt ACQ háromszög egyenlőszárú háromszög, 1 pont
szárszöge $\sphericalangle CAQ=180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ 1 pont



9 pont

Arany János Tehetséggondozó Program Matematikaversenye 2022.

9. évfolyam

Javítási útmutató

7. feladat

Anna olyan háromjegyű számokat írt a füzetébe, amelyek oszthatók 6-tal és minden számjegyük nagyobb 4-nél.

Milyen számjegyre végződhetnek Anna számai?

Hány számot írt le Anna?

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal. 1 pont

Páros számjegyre végződik, így utolsó jegy 6 vagy 8. 1 pont

Ha az utolsó jegy 6, az első két jegy összegének 3-mal oszthatónak kell lenni, mindkettő 3-mal osztható (1), vagy egyik 1, másik 2 maradékot ad 3-mal osztva (2). 1 pont

Az (1) esetben 6 vagy 9 lehet a két számjegy – ez $2 \cdot 2 = 4$ számot jelent (vagy felsorolja: 666, 696, 966, 996) 1 pont

a (2) esetben a 7 és (5 vagy 8) lehet a két számjegy – ez $2 \cdot 2 = 4$ számot jelent (vagy felsorolja: 756, 576, 786, 876). 1 pont

Ha az utolsó jegy 8, akkor a másik két jegy összege 3-mal osztva 1 maradékot ad, vagyis (1) egyik osztható 3-mal, a másik 1 maradékot ad, vagy (2) mindkettő 2 maradékot ad. 1 pont

Az (1) esetben a (6 vagy 9) és a 7 lehet a két hiányzó jegy – ez $2 \cdot 2 = 4$ számot jelent (vagy felsorolja: 678, 768, 978, 798). 1 pont

A (2) esetben 5, 8 lehet a két hiányzó jegy ez $2 \cdot 2 = 4$ számot jelent (vagy felsorolja: 558, 588, 858, 888) 1 pont

Összesen 16 számot írt Anna a füzetbe. 1 pont

9 pont