XXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny

Földes Ferenc Gimnázium, Miskolc

2023. április 21.

11. évfolyam

1. Egy dátumot nevezzünk *különlegesnek*, ha a négyjegyű évszámból és a két-két számjegyből álló hónap és nap sorszámából alkotott nyolcjegyű szám jegyei különbözők. (Például a mai dátum nem különleges, mert a 20230421 számnak vannak azonos számjegyei.)

(a) A mai naphoz viszonyítva mikor volt a legutóbbi, és mikor lesz a legközelebbi különleges dátum?

(b) Hány különleges dátum volt az 1900-as években (1900.01.01. – 1999.12.31.)?

2. Létezik olyan $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú függvény, amelyre $f(0) = 2023$, $f(2023) = 0$ és $f(2^n)$ osztható 3-mal minden természetes n szám esetén?

3. Oldja meg az

$$x^2 + 4046x \cdot \sin\left(\frac{xy}{17^2}\right) + 2023^2 = 0$$

egyenletet a valós számpárok halmazán.

4. Két kör a BC egyenest a B és C pontban érinti, egymást az A és az O pontban metszi. Az AO és BC egyenesek metszéspontja D. Határozza meg az $\frac{AO}{OD}$ arányt, ha $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 4$ egység.

5. Adott a síkban 2023 pont úgy, hogy minden pontnégyesből ki lehet választani hármat, amelyek páronkénti távolsága nem nagyobb, mint 1 egység. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan 1 egység sugarú körlap, amely legalább 1012 pontot tartalmaz a megadott 2023 pontból.

6. Az ABC háromszög C csúcsából induló szögfelező az R pontban metszi a háromszög körülírt körét. Jelölje K az AC, L a BC oldal felezőpontját. Az AC és a BC oldalak felezőmerőlegesei a CR-et a P és a Q pontokban metszik. Mutassa meg, hogy az RPK és az RQL háromszögek területe egyenlő.